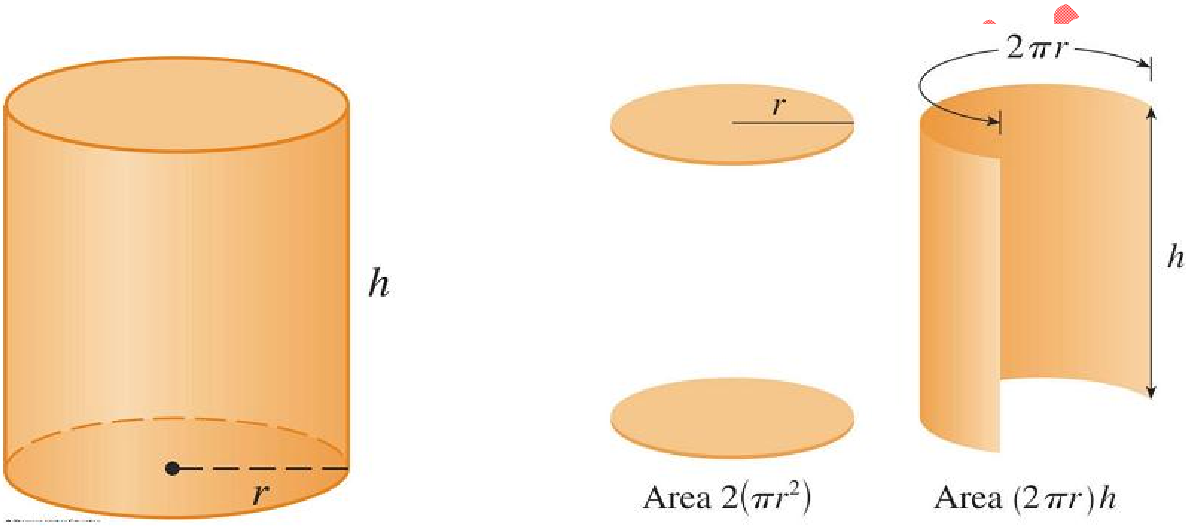
بهینه سازی کمترین سطح در ساخت یک قوطی استوانه‌ای:

یک کارخانه نیاز دارد که یک قوطی استوانه ای که بتواند در خود ۱.۵ لیتر مایع جاکند را بسازد. تعیین کنید ابعاد قوطی چه قدر باشد که مقدار مواد استفاده شده در ساخت این قوطی مینیمم شود؟

حل مسئله:

۱- شکل مسئله:



۲- مرحله بعد تعیین مدل ریاضی مسئله می باشد:

$$\text{Minimize: } A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$\text{Constraint: } \pi r^2 h = 1500$$

حال با استفاده از حجم شرط یا قیدی به صورت زیر داریم که آن را در تابع هزینه بالا قرار می‌دهیم و داریم:

$$\pi r^2 h = 1500 \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{1500}{\pi r^2} \quad \Longrightarrow \quad A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1500}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{3000}{r}$$

حال با استفاده از قضیه زیر به ادامه حل مسئله می‌پردازیم:

- اگر $f'(x) > 0$ برای هر $x < c$ و $f'(x) < 0$ برای هر $x > c$ باشند سپس $f(c)$ ماکزیمم مطلق f خواهد بود.
- اگر $f'(x) < 0$ برای هر $x < c$ و $f'(x) > 0$ برای هر $x > c$ باشند سپس $f(c)$ مینیمم مطلق f خواهد بود.

حال با استفاده از این قضیه و مشتق اول $A(r)$ داریم:

$$A'(r) = \left(2\pi r^2 + \frac{3000}{r}\right)' = 4\pi r - \frac{3000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 3000}{r^2}$$

زمانی که $r > 0$ تنها عدد بحرانی تابع هزینه خواهد بود:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3000}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}$$

آسان است نشان دادن اینکه $A'(r) < 0$ برای هر $0 < r < \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}$ و $A'(r) > 0$ برای هر $r > \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}$

پس، کمترین مقدار تابع هزینه در $r = \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}} \approx 6.2035$ اتفاق می افتد.

و در نهایت کمینه تابع هزینه که منجر به مینیمم شدن هزینه ما در ساخت جعبه می شود خواهد بود:

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}\right) \approx 725.3964 \text{ cm}^2$$

و در نهایت ارتفاع قوطی نیز به دست می آید:

$$h = \frac{1500}{\pi r^2} = \frac{1500}{\pi(750/\pi)^{2/3}} = 2r \approx 12.4070 \text{ cm}$$